Основы теории управления

Лекция 9

Анализ процессов в линейных САУ

Задача анализа САУ

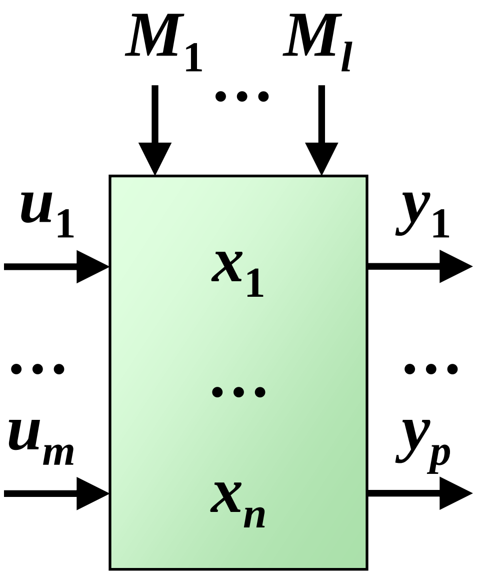
При известной структуре системы, которая задана передаточной функцией или другой динамической характеристикой, и известном входном воздействии необходимо оценить переходные процессы на выходе.

Анализ динамических систем методом фазовой плоскости

Динамические системы

Динамическая система – математическое описание реальных объектов и систем (физических, химических, биологических и др.), поведение во времени которых на любом интервале времени однозначно определяется начальным состоянием.

Таким математическим объектом может быть система автономных дифференциальных уравнений. Эволюцию динамической системы можно наблюдать в пространстве состояний системы.



- $x_1, \ldots, x_n$ **– переменные состояния (фазовые переменные)**

Линейная система второго порядка

Рассмотрим линейную однородную систему с постоянными коэффициентами:

(1)
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax + by, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = cx + dy. \end{cases}$$

Координатную плоскость xOy называют ее *фазовой плоскостью*. Через любую точку плоскости проходит одна и только одна фазовая кривая (траектория). В системе (1) возможны три типа фазовых траекторий :

- точка,
- замкнутая кривая,
- незамкнутая кривая.

Точка на фазовой плоскости соответствует стационарному решению (положению равновесия, точке покоя) системы (1), замкнутая кривая – периодическому решению, а незамкнутая – непериодическому.

Положение равновесия

Положения равновесия системы (1) найдем, решая систему:

(2)
$$\begin{cases} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0. \end{cases}$$

Система (1) имеет единственное нулевое положение равновесия, если определитель матрицы системы:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ab - cd \neq 0.$$

Если же $\det A = 0$, то, кроме нулевого положения равновесия, есть и другие, так как в этом случае система (2) имеет бесконечное множество решений.

Качественное поведение фазовых траекторий (тип положения равновесия) определяется собственными числами матрицы системы.

Точки покоя

Собственные числа матрицы системы найдем, решая уравнение:

(3) $$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0.$$

Заметим, что $a + d = \operatorname{tr} A$ (след матрицы) и $ad - bc = \det A$.

Классификация точек покоя в случае, когда $\det A \neq 0$, приведена в таблице:

Корни уравнения (3)	Тип точки покоя
λ_1, λ_2 - вещественные, одного знака ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$)	Узел
λ_1, λ_2 - вещественные, разного знака ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$)	Седло
λ_1, λ_2 - комплексные, $\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 \neq 0$	Фокус
λ_1, λ_2 - комплексные, $\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = 0$	Центр

Устойчивость точки покоя

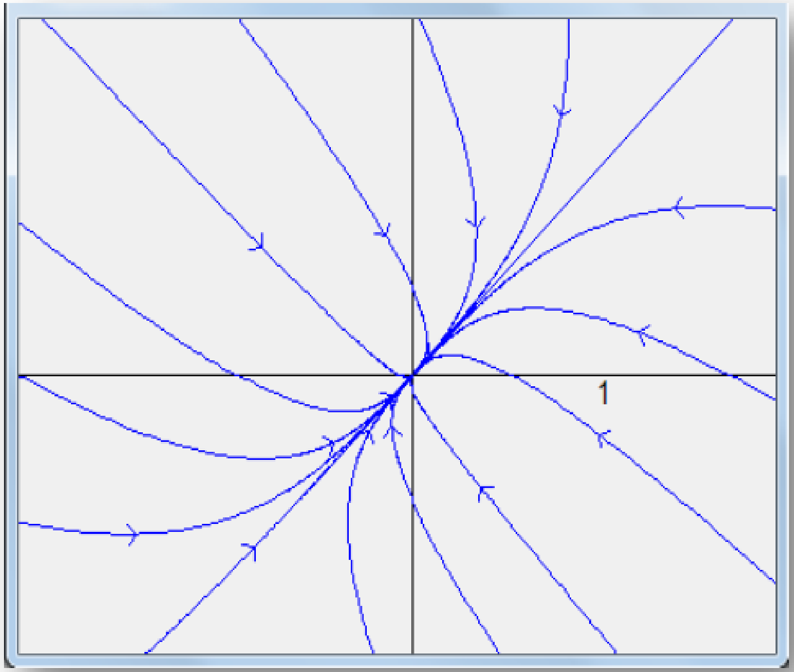
Собственные значения матрицы системы (1) однозначно определяют характер устойчивости положений равновесия:

Условие на вещественную часть корней уравнения (3)	Тип точки и характер устойчивости
1. Если вещественные части всех корней уравнения (3) отрицательны, то точка покоя системы (1) асимптотически устойчива.	Устойчивый узел, устойчивый фокус
2. Если вещественная часть хотя бы одного корня уравнения (3) положительна, то точка покоя системы (1) неустойчива.	Седло, Неустойчивый узел, Неустойчивый фокус
3. Если уравнение (3) имеет чисто мнимые корни, то точка покоя системы (1) устойчива, но не асимптотически.	Центр

Фазовые портреты

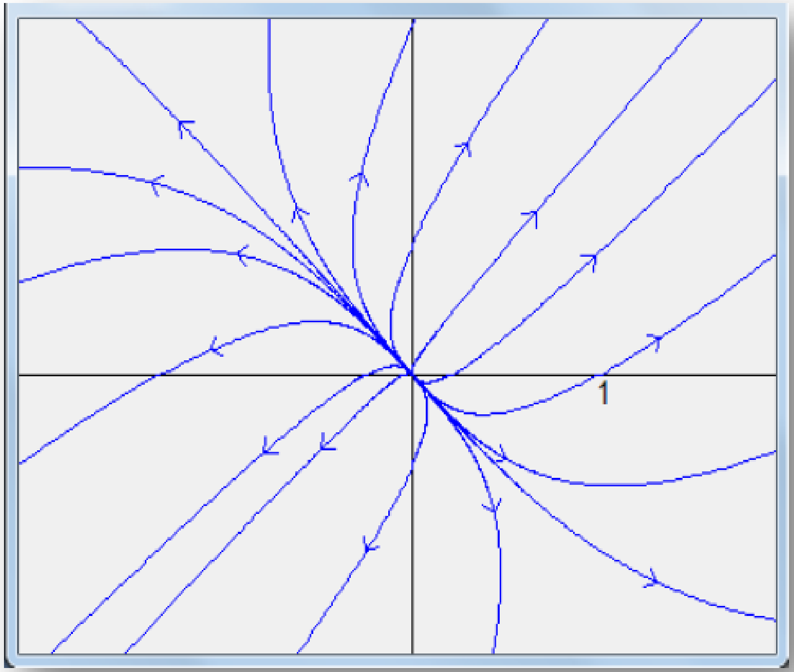
Устойчивый узел

$\lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0$



Неустойчивый узел

$\lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0$

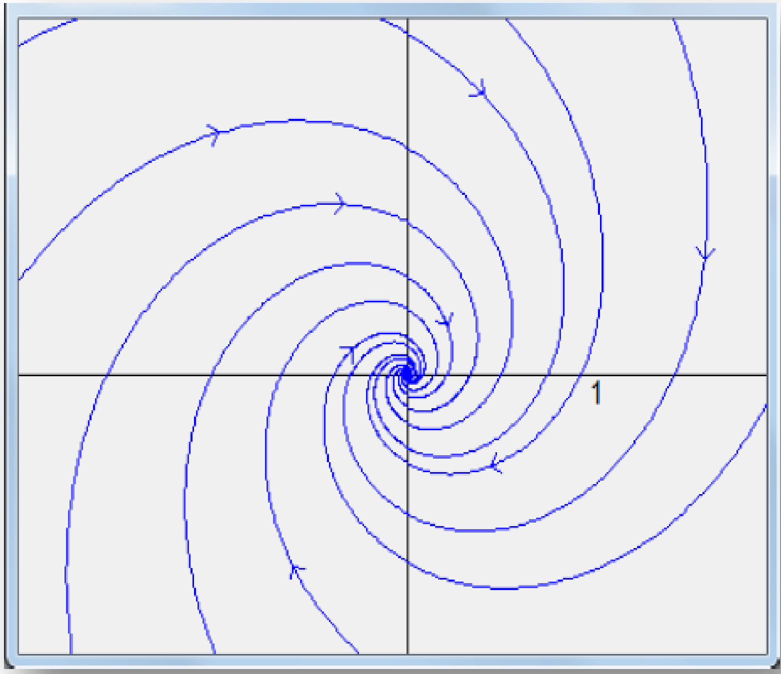


Направление на фазовой кривой указывает направление движения фазовой точки по кривой при возрастании t.

Фазовые портреты

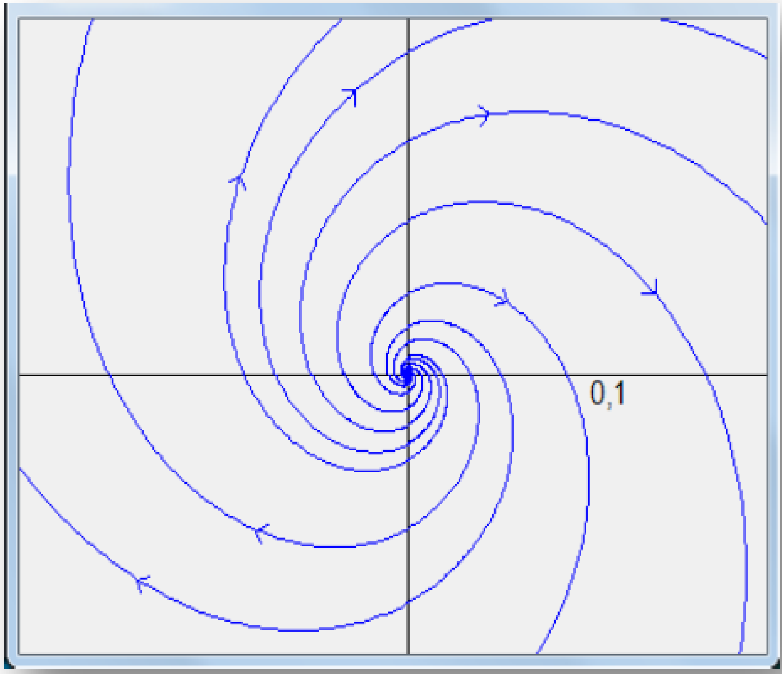
Устойчивый фокус

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha < 0$, $\beta \neq 0$



Неустойчивый фокус

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha > 0$, $\beta \neq 0$

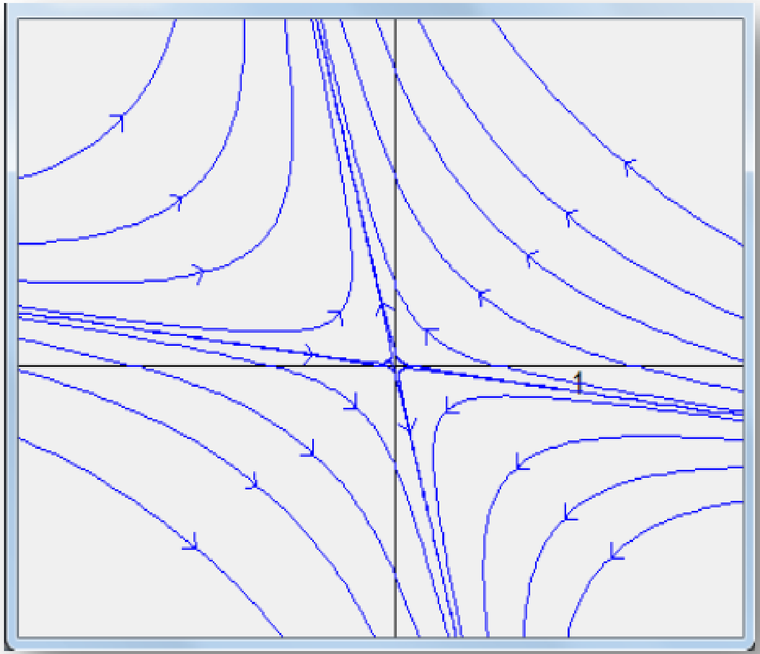


Направление на фазовой кривой указывает направление движения фазовой точки по кривой при возрастании *t*.

Фазовые портреты

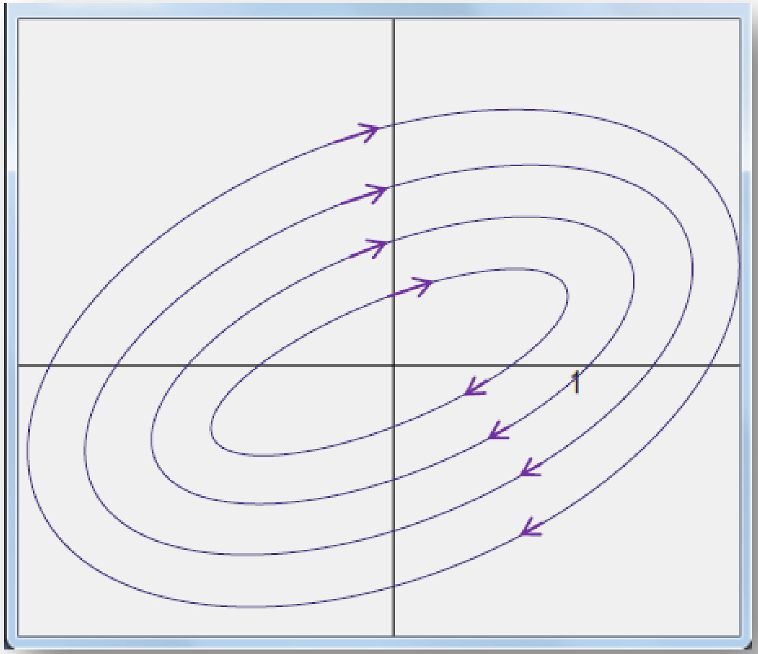
Седло

$\lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 > 0$



Центр

$\lambda_{1,2} = \pm i\beta \,, \quad \beta \neq 0$



Направление на фазовой кривой указывает направление движения фазовой точки по кривой при возрастании t.

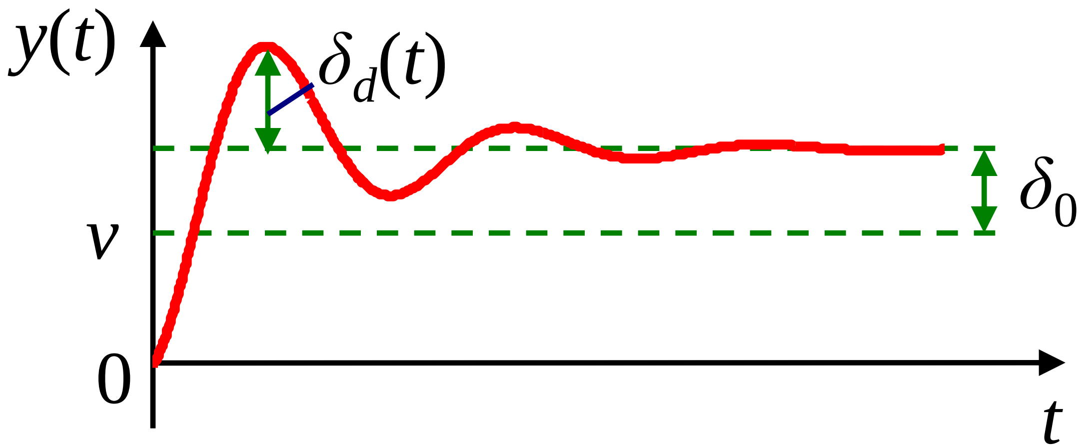
Показатели качества переходных процессов

Ошибка регулирования

Цель регулирования: $\lim_{t\to\infty} y(t) = v$

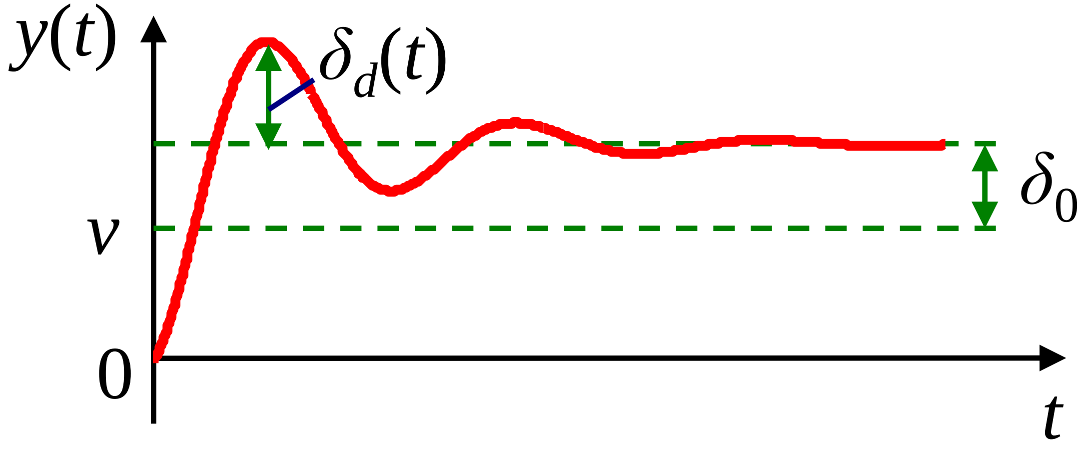
$\delta(t) = v - y(t)$ – ошибка регулирования

$$\delta_0 = \lim_{t\to\infty} \delta(t) = \lim_{t\to\infty} \left[v - y(t) \right] \qquad \delta_d(t) = \delta(t) - \delta_0$$



Интегральные оценки

$$I_1 = \int_0^\infty \delta_d(t)\,dt \qquad I_2 = \int_0^\infty \delta_d^2(t)\,dt$$

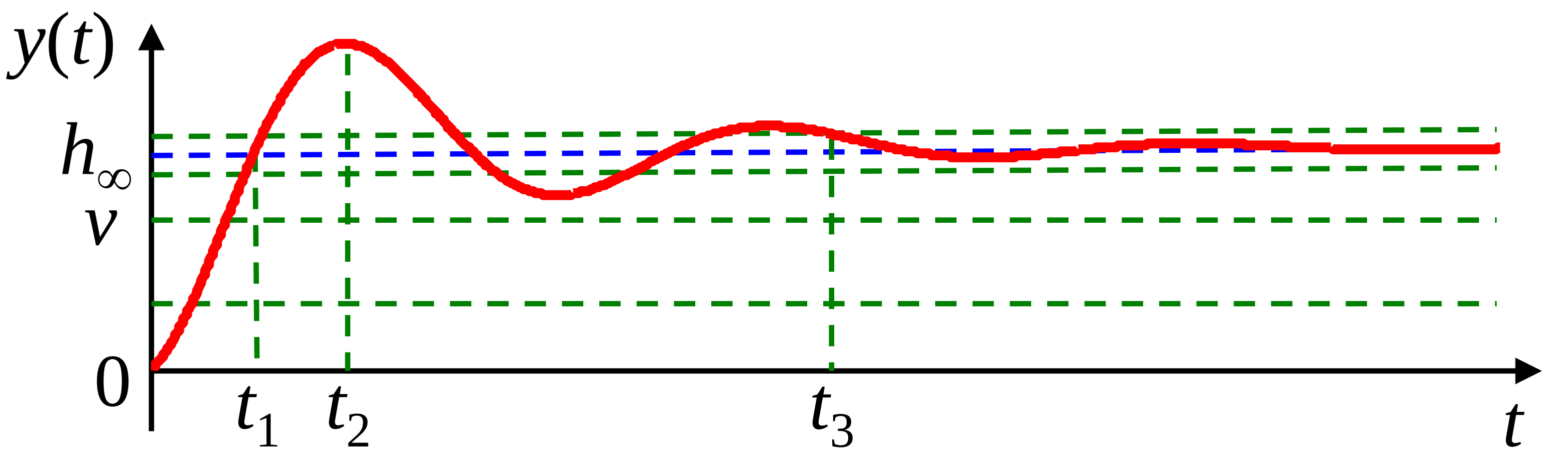


Быстродействие

t_1 – время от начала процесса до первого момента достижения установившегося значения h_∞;

t_2 – время достижения первого максимума;

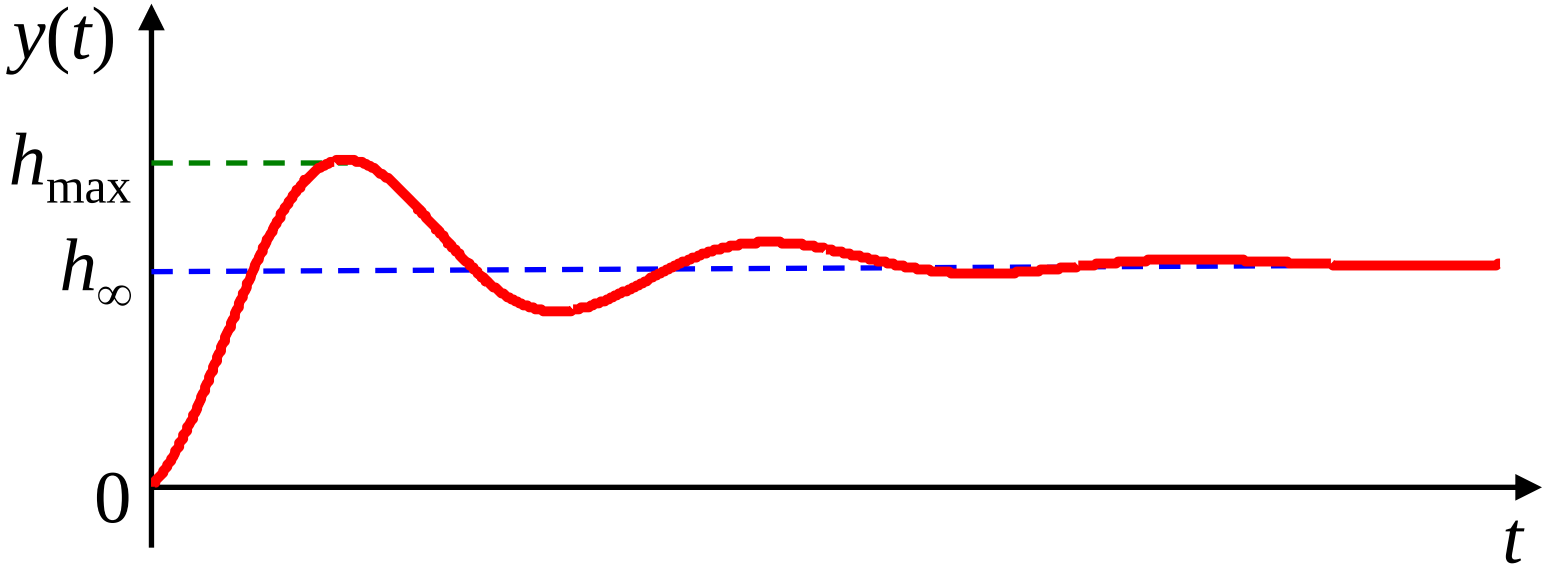
t_3 – время от начала процесса до момента достижения установившегося значения h_∞ с ошибкой регулирования, не превышающей заданного значения.



Перерегулирование

$$\sigma = \frac{h_{\max} - h_{\infty}}{h_{\infty}}$$

$$\sigma_{\%} = \frac{h_{\max} - h_{\infty}}{h_{\infty}} \cdot 100\%$$



Анализ процессов в системах низкого порядка

Задача анализа САУ

При известной структуре системы, заданной передаточной функцией или другой динамической характеристикой, и известном входном воздействии необходимо оценить переходные процессы на выходе.

Поведение многих реально существующих объектов и систем управления можно описать уравнениями **не выше третьего порядка**, поэтому важно установить взаимосвязь между параметрами математической модели и качеством протекающих в системах переходных процессов.

Система первого порядка

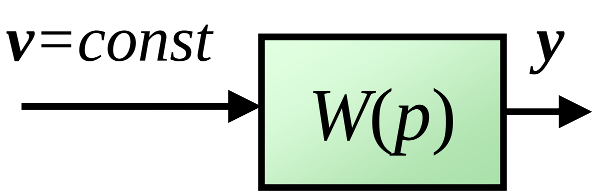
$$W(p)=\frac{k}{Tp+1}$$

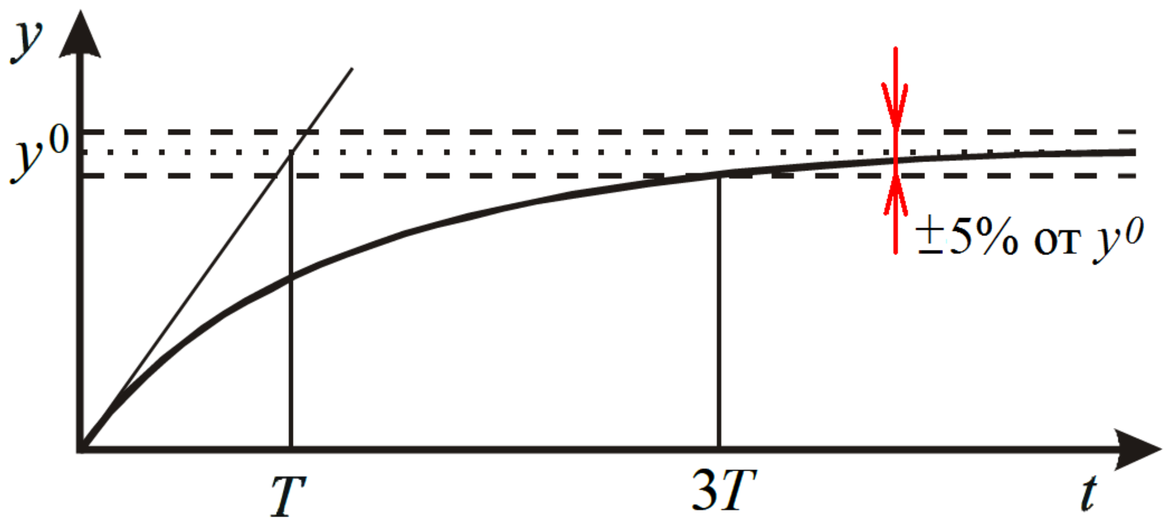
Параметры:

•коэффициент усиления *k*;

•постоянная времени *T*.

Реакция на постоянное входное воздействие





Установившееся значение: $y^0=W(0)v=kv$

Система первого порядка

Выводы:

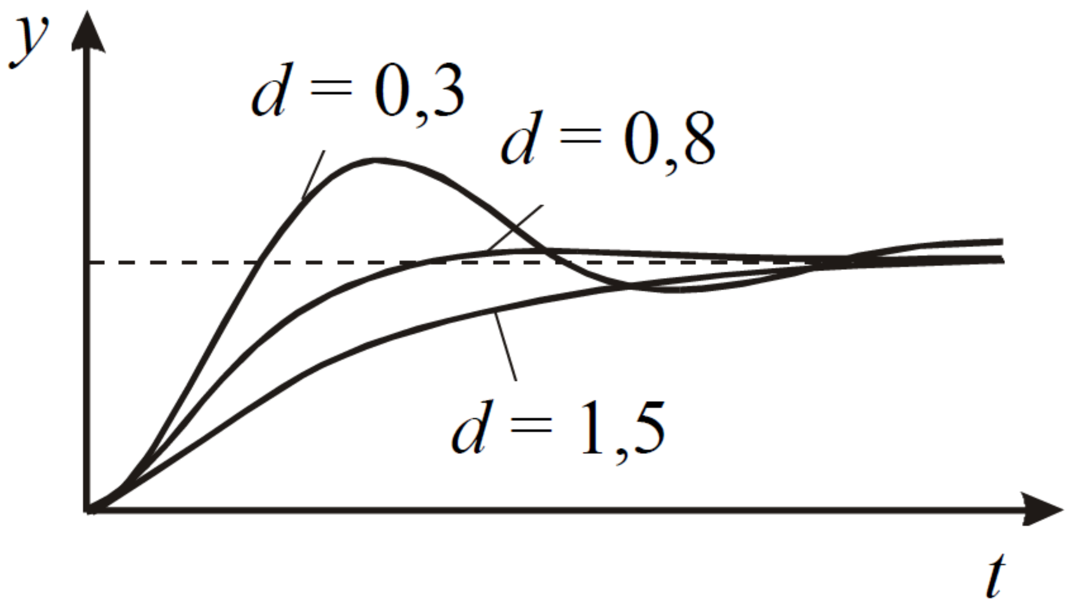
•коэффициент усиления k определяет установившееся значение $y^0 = kv$;

•постоянная времени T определяет длительность переходного процесса $t \approx 3T$.

Система второго порядка

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2dTp + 1}$$

Параметры:
- коэффициент усиления *k*;
- постоянная времени *T*;
- коэффициент демпфирования *d*.



Система второго порядка

- Коэффициент демпфирования определяет вид переходного процесса:
  - при $d \geq 1$ – апериодический процесс;
  - при $d < 1$ – затухающие колебания;
  - при $d = 0$ – незатухающие колебания.

- Время переходного процесса зависит как от постоянной времени T, так и коэффициента демпфирования d. Если $0{,}5 \leq d \leq 1$, то $t \approx 3T$.

- Установившееся значение определяется усилением k и демпфированием d.

Система третьего порядка

$$W(p) = \frac{k}{T^3 p^3 + AT^2 p^2 + BTp + 1}$$

Параметры:

•коэффициент усиления *k*;

•постоянная времени *T*;

•*A* и *B* – определяют колебательные свойства.

Характеристики:

•установившееся значение: $y^0 = kv$;

•длительность переходного процесса: $t \approx 3T$.

Колебательные свойства системы третьего порядка

Характеристическое уравнение:

$$T^3p^3 + AT^2p^2 + BTp + 1 = 0$$

Поскольку постоянная времени не влияет на колебательность, перейдем к нормированному характеристическому уравнению:

$$q^3 + Aq^2 + Bq + 1 = 0$$

Система будет устойчивой, если выполняется условие:

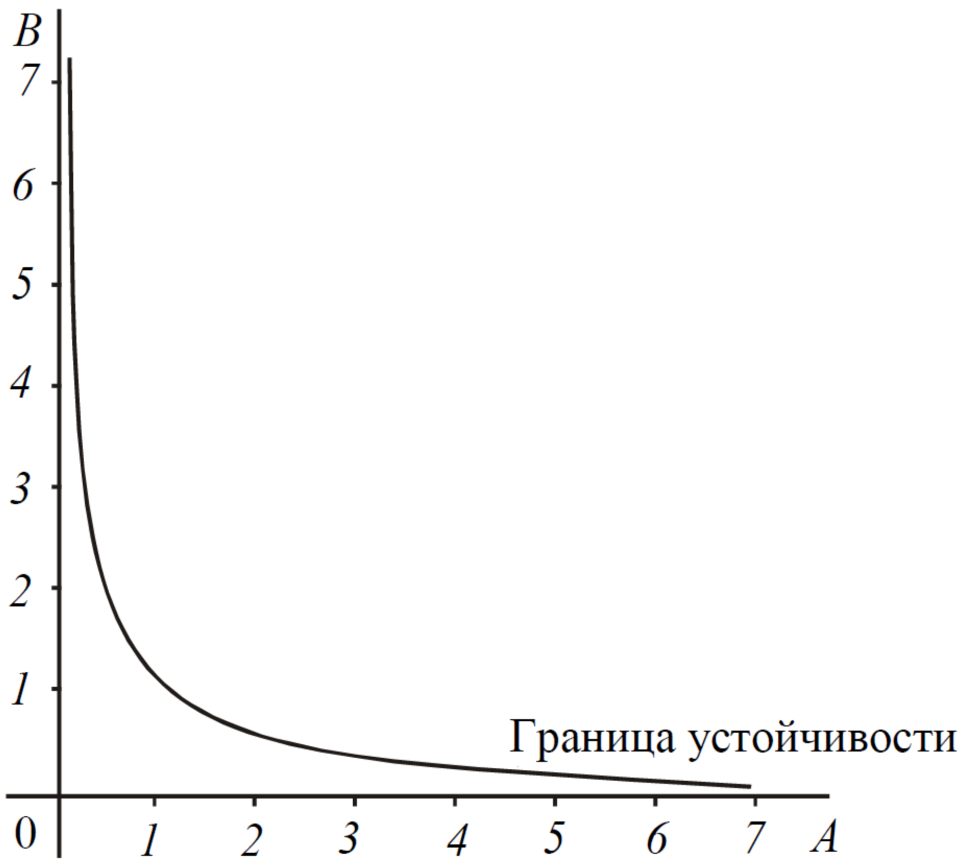
$$AB > 1$$

(проверить самостоятельно по критерию Гурвица)

Колебательные свойства системы третьего порядка

Граница устойчивости: $AB = 1.$

Рассмотрим область значений параметров *A* и *B*:



Колебательные свойства системы третьего порядка

В зависимости от расположения корней характеристического уравнения $q^3 + Aq^2 + Bq + 1 = 0$, можно выделить 3 подобласти:

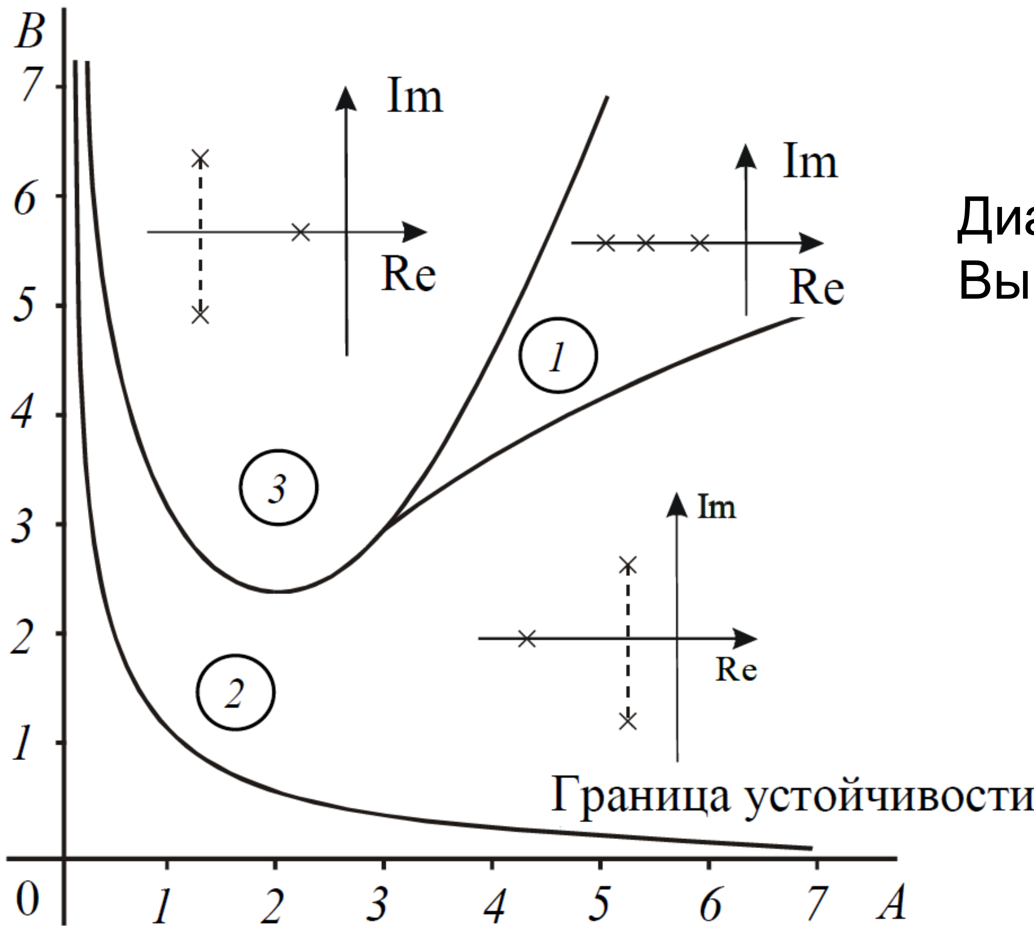
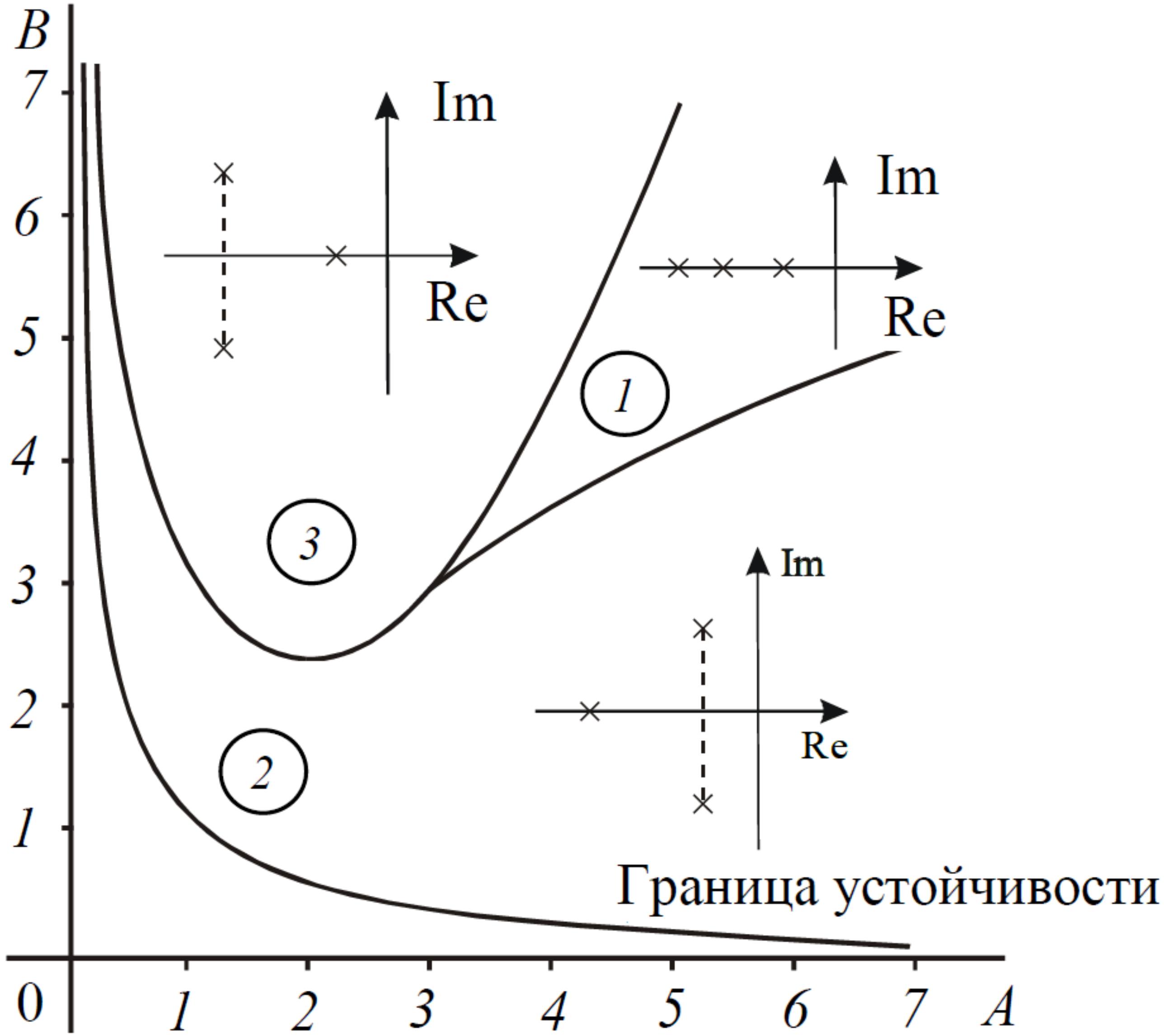


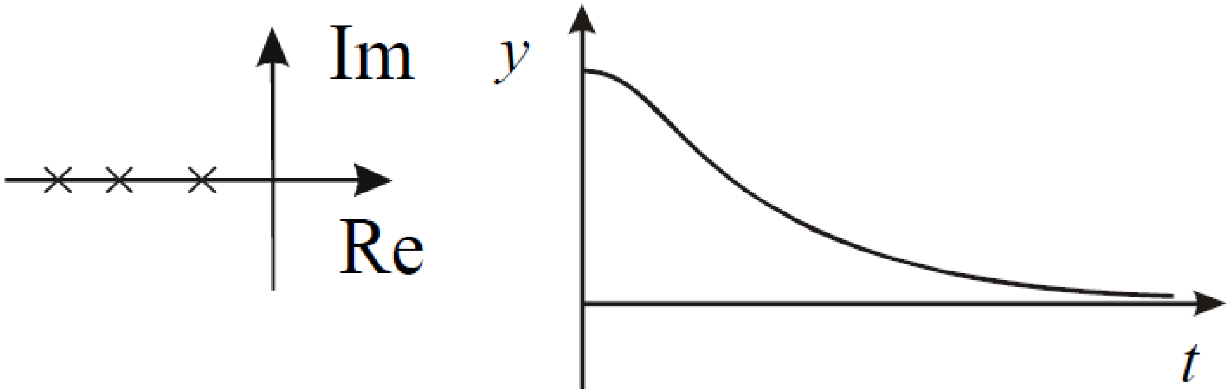
Диаграмма Вышнеградского И.А. (1876г.)

Диаграмма Вышнеградского

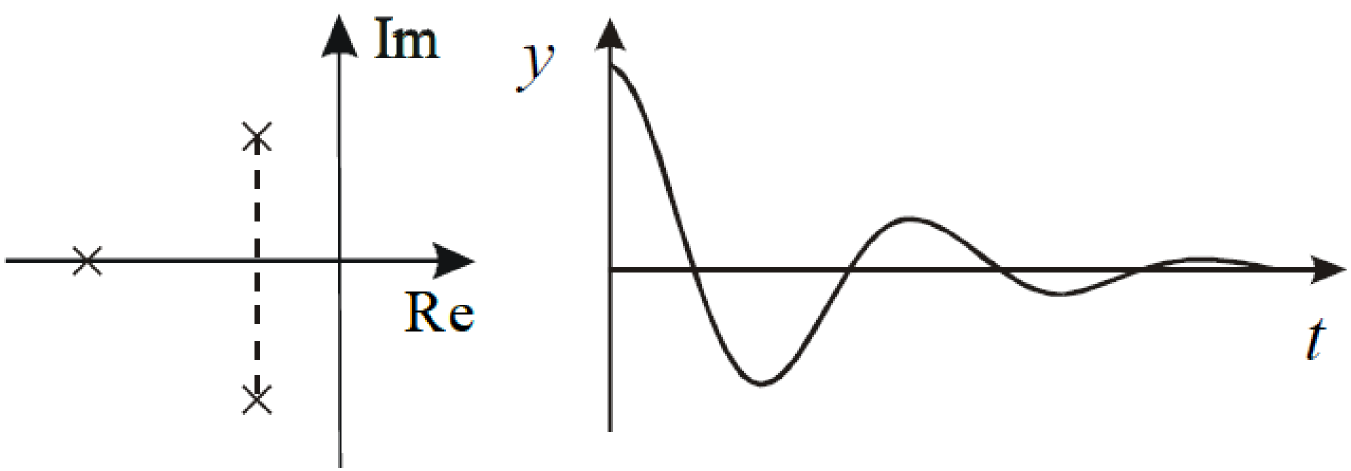


Колебательные свойства системы третьего порядка

Вещественные корни

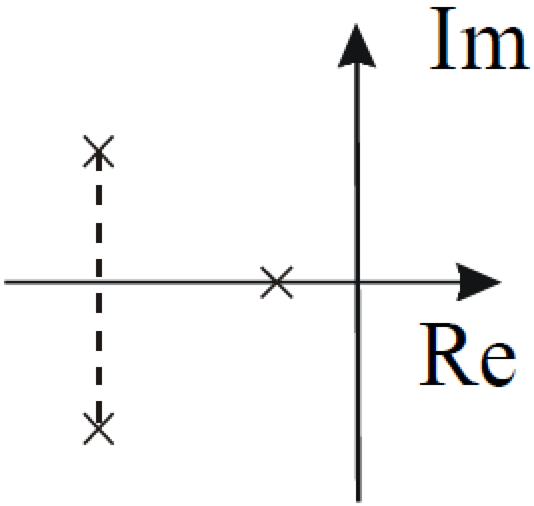


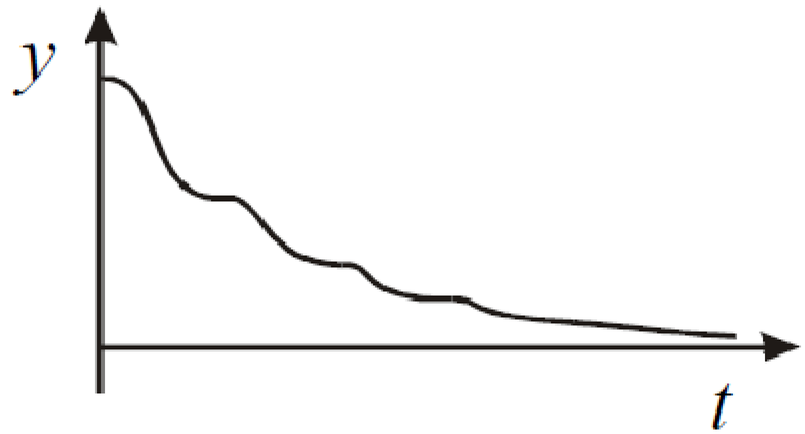
Комплексные корни ближе к мнимой оси



Колебательные свойства системы третьего порядка

Вещественный корень ближе к мнимой оси





Спасибо за внимание!